# MA1 – přednáška 23.10.2019

1. Dokončení stručného „výkladu" o posloupnostech a nekonečných řadách (viz přednáška 21.10.2019) – příklady limit posloupností, stručně o konvergenci nekonečných řad. Věta o limitě monotónní posloupnosti.

2. Heineho věta (přednáška 21.10) a její užití k důkazu neexistence limity funkce.
   Věty o uspořádání limit (přednáška 16.10)

3. Věta o limitě monotónní funkce (analogie věty o limitě monotónní posloupnosti.

Definice: $f: M \to \mathbb{R}$ je na $M$ omezená shora, když existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že $f(x) \leqq c$ pro $\forall x \in M$, $f$ je omezená zdola na $M$, když existuje $d \in \mathbb{R}$ tak, že $f(x) \geqq d$ pro $\forall x \in M$; $f$ je omezená na $M$, když je omezená na $M$ zdola i shora.

Věta. Nechť $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ je monotónní omezená funkce. Pak existují limity $\lim\limits_{x \to b-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ a jsou vlastní.

Speciálně: $f: (a,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f$ je neklesající a omezená shora, pak $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$ (tj. existuje a je vlastní)
není-li $f$ na $(a,+\infty)$ omezená shora, je $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (tj. existuje a je nevlastní)

Analogicky pro funkce nerostoucí na $(a,+\infty)$ a omezené zdola, podobně i pro $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

4. **Derivace funkce** – v úvodu k přednášce MA1 – „motivace“ okamžitá rychlost, směrnice tečny grafu

**Definice:** Nechť $f$ je definovaná v $U(a)$. Existuje-li

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \left(\text{nebo } \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right),$$

nazýváme tuto limitu derivací funkce $f$ v bodě $a$ a značíme $f'(a)$ nebo $\frac{df}{dx}(a)$ (častěji takto v aplikacích v přírodních vědách)

Je-li $f$ definovaná v $U_+(a)$ (resp. v $U_-(a)$) a existuje-li

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \left(\text{resp. } \lim_{x\to a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right),$$ pak tuto limitu nazýváme jednostrannou derivací zprava (zleva) v bodě $a$ a značíme $f'_+(a)$ ($f'_-(a)$).

**Poznámka:** 1. Existuje-li $f'(a) \Rightarrow$ existují i $f'_+(a)$, $f'_-(a)$ a $f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a)$

2. Je-li $f'(a) \in R$ – derivace je „vlastní“ derivace, je-li $f'(a) = +\infty$ ($-\infty$), pak říkáme, že funkce $f$ má v bodě $a$ derivaci nevlastní.

**Příklady:** 1) $f(x) = c$, $x \in R$:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{c-c}{x-a} = \lim_{x\to a} 0 = 0 \text{ pro lib. } a\in R$$

2) $f(x) = x$, $x \in R$, $a \in R$ libovolný;

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{x-a}{x-a} = \lim_{x\to a} 1 = 1$$

3. $f(x) = x^2, \ a \in \mathbb{R}$:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \to a} (x + a) = 2a$$

4. $f(x) = \sqrt{x}, \ a > 0$:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{x - a} \cdot \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

$a = 0$: $\quad f'_+(0) = \lim_{x \to 0+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = „\frac{1}{0+}" = +\infty$

5. $f(x) = \frac{1}{x}, \ a \neq 0$:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{a - x}{(x - a) \cdot a x} = -\frac{1}{a^2}$$

6. $f(x) = e^x, \ a \in \mathbb{R}$ – víme, že $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$,

tj. $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

a pro $a \neq 0$: užijeme druhou „verzi" definice $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{a+h} - e^a}{h} = \lim_{h \to 0} e^a \cdot \frac{e^h - 1}{h} = e^a$$

7. $f(x) = \ln x, \ a > 0$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\ln\left(\frac{x}{a}\right)}{a\left(\frac{x}{a} - 1\right)} \underset{\text{VLSF}}{=} \left(\frac{x}{a} = t\right)$$

$$\lim_{t \to 1} \frac{\ln t}{a(t - 1)} = \frac{1}{a}$$

8. $f(x) = \sin x,\ a \in R$ : 1) víme, že $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

2) $a \in R$ : $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h}$ = (součtový vzorec)

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin a \cdot \cos h + \cos a \sin h - \sin a}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left( \sin a \, \frac{\cos h - 1}{h} + \cos a \cdot \frac{\sin h}{h} \right) = \cos a,$$

neboť $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ a $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

9. $f(x) = |x|,\ a \in R$ : $a > 0$ $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{x - a}{x - a} = 1$

(v $U(a)$ je $|x| = x$)

$a < 0$ $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{-x - (-a)}{x - a} = -1$

(v jistém okolí je $|x| = -x$)

$a = 0$ $f'_+(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1$,

v $U_+(0)$ : $|x| = x$, v $U_-(x)$ : $|x| = -x$

ale $f'_-(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{-x}{x} = -1$

tedy – funkce $f(x) = |x|$ nemá derivaci v bodě $a = 0$

10. $f(x) = \operatorname{sgn} x$ $\left( = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \right)$ ; dostaneme

$f'(a) = 0$ pro $a \in (-\infty, 0)$ i $a \in (0, +\infty)$, ale

$$\left.\begin{array}{l} f'_+(0) = \lim\limits_{x \to 0+} \frac{\operatorname{sgn} x - 0}{x} = \lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ a i} \\ f'_-(0) = \lim\limits_{x \to 0-} \frac{\operatorname{sgn} x - 0}{x} = \lim\limits_{x \to 0-} \frac{-1}{x} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{f'(0) = +\infty}$$

Z uvedených příkladů vidíme, že počítat derivace užitím definice není vždy jednoduché – u spojitých funkcí v bodě $a$ je to vždy limita typu „$\frac{0}{0}$" – a tak budeme postupovat podobně „jako u limit":

po definici (tu už máme) určíme derivace základních jednoduchých funkcí – tj. „tabulku derivací" (další už máme dost spočítaných derivací – jistě rozšíříme) a pak se seznámíme s pravidly (věty v matematice), jak napsat derivace (pokud známe derivace $f, g$):

$(cf)'$, $(f+g)'$, $(f\cdot g)'$, $\left(\frac{f}{g}\right)'$, $\left(f(g(x))\right)'$, $\left(f^{-1}(x)\right)'$.

<u>Ještě poznámka – derivace jako funkce:</u>

Nechť $Df'$ je množina všech bodů z $Df$, pro které existuje vlastní $f'$ (tj. $a \in Df' \Leftrightarrow$ ex. $f'(a) \in R$)

Můžeme tedy uvažovat „novou" funkci:

$x \in Df' \longrightarrow f'(x) \in R$ – derivace „jako" funkce

a pak můžeme psát (i tak chápat):

$(x^2)' = 2x,\ x \in R$ $\qquad$ $(\sin x)' = \cos x,\ x \in R$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2},\ x \neq 0$ $\qquad$ $(e^x)' = e^x,\ x \in R$

a podobně dále v našich příkladech uvedených dříve.

**Nyní „tabulka" derivací** (toto nám stačí)

$c' = 0 \quad , \quad x \in R$

$(x)' = 1 \quad , \quad x \in R$

$(x^n)' = n x^{n-1} \quad , \quad x \in R$ pro $n \in N$ („máme" pro $n=2$)

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad , \quad x \in M_\alpha$ (podle exponentu $\alpha$)

(„víme" $\alpha = -1, \alpha = \frac{1}{2}$)

$(e^x)' = e^x \quad , \quad x \in R$

$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad , \quad x \in R$

$(\sin x)' = \cos x \, , \quad x \in R$

a dále dodáme:

$(\cos x)' = -\sin x \quad , \quad x \in R$

$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad , \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \, k \in Z$

$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad , \quad x \neq k\pi, \, k \in Z$

$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad , \quad x \in R$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad x \in (-1, 1)$

**A dále pravidla pro výpočet derivací:**

(některá se pokusíme dokázat, ostatní uvedeme bez důkazů a ukázáme, jak se pravidla používají pro výpočet derivací funkce)

**Věta (aritmetika derivací)**

Nechť existují vlastní derivace $f'(x), g'(x)$. Pak také existují vlastní derivace v bodě $x$ funkcí $c \cdot f$ ($c$ – konstanta), $f+g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (je-li $g(x) \neq 0$) a platí:

(1) $(cf)'(x) = c \cdot f'(x)$

(2) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

(3) $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

(4) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

**Věta (o derivaci složené funkce)** $[(f \circ g)(x) = f(g(x))]$

Nechť existuje vlastní $g'(x)$, a $f'(y)$ vlastní pro $y = g(x)$.

Pak existuje i $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

**Věta (o derivaci inverzní funkce)**

Nechť k funkci $f$ existuje inverzní funkce na intervalu $(a,b)$, $f(a,b) = (c,d)$ (tj. $f^{-1}$ je definována na intervalu $(c,d)$).

Pak, ex.-li $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ (a vlastní) pro $x \in (c,d)$,

je $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

---

Dále uvedeme několik příkladů výpočtu derivací podle uvedených pravidel – možná několik důkazů, bude-li čas, nebo v příští přednášce.

Budeme také značit $f'(a)$ v konkrétním příkladě:

$$(x^2)'_{x=a} = 2a \quad \text{apod.}$$

## Příklady výpočtu derivací funkce

1) $(3\sin x)' = 3(\sin x)' = 3\cos x, \quad x \in R$

2) $(x^2 + \sqrt[3]{x})' = (x^2)' + (x^{\frac{1}{3}})' = 2x + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}, \quad x \neq 0$

3) $(\sqrt[3]{x})'_{x=0} = +\infty \quad \left( (\sqrt[3]{x})'_{x=0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2} = +\infty \right.$

4) $(x^2\cos x)' = (x^2)'\cos x + (x^2\cos x)' = 2x\cos x - x^2\sin x, \quad x \in R$

5) $$\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)' = \frac{(x^2-1)'(x^2+1) - (x^2-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(x^2+1) - (x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} =$$
$$= \frac{4x}{(x^2+1)^2}, \quad x \in R$$

6) $$(\mathrm{tg}\, x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{\cos^2 x - (-\sin^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \ k \in Z$$

7) derivace složené funkce

$$(\sin(5x))' = (\sin)'(5x)\cdot(5x)' = \cos(5x)\cdot 5, \quad x \in R$$

„návod" $(\sin(\ \ ))' = \cos(\ \ )\cdot(\ \ )'$

$$(\sin(\ln x))' = \cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}, \quad x > 0$$
$$(= \cos(\ln x)\cdot(\ln x)')$$

$$(\ln(x^2+1))' = \frac{1}{x^2+1}\cdot(x^2+1)' = \frac{2x}{1+x^2}$$

obecně (důležité!) $(\ln(g(x)))' = \frac{1}{g(x)}\cdot g'(x)$, pokud $g(x) > 0$ a ex. $g'(x) \in R$

$\underline{((g(x))^n)'} = \underline{n(g(x))^{n-1} \cdot g'(x)}$ $\quad (n \cdot g'(x) \in R)$

(podobně pro $(g(x))^\alpha$)

$\underline{(e^{\frac{1}{x}})'} = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \underline{-\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}, \ x \neq 0}$

(obecně " : $(e^{(\ )})' = e^{(\ )} \cdot (\ )'$ )

$\underline{(a^x)'}_{\underline{a>0}} = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} (x \cdot \ln a)' = \underline{a^x \cdot \ln a}$

9) $\underline{(f(x)^{g(x)})'} \underset{def.}{=} (e^{g(x) \cdot \ln f(x)})' = e^{g(x) \ln f(x)} \cdot (g(x) \ln f(x))' =$

$x \in \mathcal{D}f \cap \mathcal{D}g$, $g'(x), f'(x)$ jsou vlastní a $f(x) > 0$ v $(a,b)$

$= \underline{f(x)^{g(x)} \left( g'(x) \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right)}$

spec. $\underline{(x^{\sin x})'}_{x>0} = (e^{\sin x \cdot \ln x})' = x^{\sin x} (\sin x \cdot \ln x)' =$

$= \underline{x^{\sin x} \left( \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)}$

10) $\underline{(\operatorname{arctg} x)'} = \frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)}} = \cos^2(\operatorname{arctg} x)$

$= \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \underline{\frac{1}{1+x^2}}, \ x \in R$

( $\cos^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$, pokud $\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ )

## Derivace vyšších řádů

funkce $f(x)$ má (první) derivaci $f'(x)$ $(\in R)$ v $(a,b)$
$f'(x)$ je „opět" funkce, a tedy můžeme zkoumat, má-li také derivaci –

**Def.** $x_0 \in (a,b)$, pak ex. $f'(x)$ v $U(x_0)$ a můžeme vypočítat

$$(f'(x))'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

– ex.-li, pak tuto limitu nazýváme druhou derivací fce $f$ v bodě $x_0$ a značíme $f''(x_0)$.

**Příklad:**

$(\sin x)' = \cos x \quad , x \in R$

$(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x, \; x \in R$

$((x^4)'' = (4x^3)' = 12x^2$ apod.

**Definice n-té derivace funkce.**

Můžeme definovat i derivace n-tého řádu funkce $f$ v bodě $x \in Df$ (označujeme $f^{(n)}(x)$)

nechť ex. $f^{(n-1)}(x)$ v $U(x_0)$; ex.-li $\left(f^{(n-1)}(x)\right)'_{x=x_0}$,

říkáme, že $f$ má v bodě $x_0$ derivaci n-tého řádu (stručně n-tou derivaci) a značíme tuto derivaci

$$f^{(n)}(x_0) \quad \left( = \left(f^{n-1}(x)\right)'_{x=x_0} \right)$$

(Definice indukcí)

**Příklad:** $(e^x)^{(n)} = e^x \quad , x \in R$